□18□ □□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□

1□□2021·□□□·□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-2)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}+ax+2, a\in R$.

□1□□ $a=1$ □□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $x\geq 0$ □□□□ $f(x)\geq 0$ □□□□ a □□□□.

□□□□

□1□□□□□ $(-\infty,0)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□ $(0,1)$

□2□ $2e-4$

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)>0$ □ $f'(x)<0$ □□□

□2□□□ $a\leq 1$ □□□□□□□ $a>1$ □□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=\ln a$ □□□ $1<a<e$ □□□□□□□.

□1□

□ $a=1$ □□ $f(x)=(x-2)e^{x}-\frac{x^{2}}{2}+x+2$ □ $f'(x)=(x-1)(e^{x}-1)$ □

□ $f'(x)>0\Rightarrow x<0$ □ $x>1$ □ $f'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$ □

$\therefore f(x)$ □□□□□ $(-\infty,0)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□ $(0,1)$ □

□2□

$f'(x)=(x-1)(e^{x}-a)$

① □ $a\leq 1$ □□ $e^{x}-a\geq 0$ □

$\therefore x\in(0,1)$ □□ $f'(x)<0, f(x)$ □□□□ $\Rightarrow f(x)<f(0)=0$ □□□□□□.

② □ $a>1$ □□□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=1, x_2=\ln a$ □

□ $1<a<e$ □□ $x_1>x_2$ □□ $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\ln a$ □ $x>1$ □ $f'(x)<0\Rightarrow \ln a<x<1$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,\ln a)$ □□□□□□ $(\ln a,1)$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ $f(0)=0$ □ $\therefore$ □□ $f(1)\ge 0\Rightarrow a\ge 2e-4$ □

□□□ a □□□□□ $2e-4$.

2□□2021·□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ □ $x=\frac{1}{2}$ □□□□□□□□□ $y=f(x)$ □□ $(1,f(1))$ □□□□□□□ $x-y+1=0$ □□.

□1□□□□ a,b □□□

□2□□ $\forall x\in[1,+\infty)$ □□□□ $f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ □□□□□□□ m □□□□□.

□□□□

□1□ $a=1,b=-2$

□2□ $m\ge\frac{1}{2}$

□□□□

□1□□□□ $f(x)=a\ln x+bx$, □□ $f'(x)=\frac{a}{x}+b$ □□□□ $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ □ $x=\frac{1}{2}$ □□□□□□□□ a□b □□□□□□□□

□ $y=f(x)$ □□ $(1,f(1))$ □□□□□□□ $x-y+1=0$ □□□□.

□2□□□□□ $f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ □□□□□□□ $\ln x\le m(x-\frac{1}{x})$ □□□□□ $x=1$ □□□□□□□ $x>1$ □□ $m\ge\frac{x\ln x}{x^2-1}$ □□□□□

$h(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$ □□□□□□□□□.

□1□

□□ $f(x)=a\ln x+bx$,

$\therefore f'(x)=\frac{a}{x}+b$□

□□ $f(x)=a\ln x+bx(a,b\in R)$ □ $x=\frac{1}{2}$ □□□□□□

$\therefore f'(\frac{1}{2})=2a+b=0$

$y=f(x)$ $(1, f(1))$ $x-y+1=0$

$\therefore f'(1)=a+b=-1$

$a=1, b=-2$

（2）

$f(x)\le(m-2)x-\frac{m}{x}$ $\ln x\le mx-\frac{m}{x}$

$\ln x\le m(x-\frac{1}{x})$

$x=1$ $x>1$ $m\ge\frac{x\ln x}{x^2-1}$

$h(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$

$h'(x)=\frac{(\ln x+1)(x^2-1)-2x\cdot x\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-x^2\ln x-\ln x-1}{(x^2-1)^2}$

$m(x)=x^2-x^2\ln x-\ln x-1$

$m'(x)=2x-2x\ln x-x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x^2\ln x-1}{x}$

$n(x)=x^2-2x^2\ln x-1$

$n'(x)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x<0$

$n(x)=x^2-2x^2\ln x-1$ $(1,+\infty)$

$n(x)<n(1)=0$

$m'(x)<0$

□□ $m(x)=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$ □ $m'(x)=-2\ln x-1+\dfrac{1}{x^2}<0$ □

□ $m(x)=x-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□ $m(x)<0$ □□

□□□ $m(x)<m(1)=0$ □□ $h'(x)<0$ □□□ $h(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ m □□□□□ $h(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□ $x=1$ □□ $y=h(x)$ □□□□□□□□□□□ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}$ □

$\therefore m\geq\dfrac{1}{2}$ □

3□□2021·□□□·□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x\ln x+kx-3k$ □□□

□1□□ $k=1$ □□□□□ $f(x)$ □□ $(1$□ $f(1))$ □□□□□□□

□2□□ $x>3$ □□□□ $f(x)>1$ □□□□ k □□□□.

□□□□

□1□ $2x-y-4=0$

□2□-3

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□2□□□□□□□□□□□□□□□.

□1□

□ $k=1$ □□ $f(x)=x\ln x+x-3$

$\therefore f(x)=\ln x+2$

$\therefore ff(1)=2\ \ (1)=-2$

$\therefore f(x)$ □□ $(1,\ f(1))$ □□□□□□□ $y+2=2(x-1)$ □ $2x-y-4=0$

□2□

□□□□ $f(x)>1$ □□ $x\ln x+kx-3k>1$ □□ $k(x-3)>1-x\ln x$ □

□ $x>3$ □ $\therefore k>\frac{1-x\ln x}{x-3}$ □□□.

□ $g(x)=\frac{1-x\ln x}{x-3}$ □ $\therefore g'(x)=\frac{3\ln x-x+2}{(x-3)^2}$

□ $h(x)=3\ln x-x+2$ □□ $h'(x)=\frac{3-x}{x}<0$ □□□.

$\therefore h(x)$ □ $(3,+\infty)$ □□□□

$h(8)=3\ln 8-6>0$ □ $h(9)=3\ln 9-7<0$

$\therefore \exists x_0\in(8,9)$ □ $h(x_0)=0$ □□ $3\ln x_0-x_0+2=0$ □□ $\ln x_0=\frac{x_0-2}{3}$ □

$\therefore$ □ $x\in(8,x_0)$ □□ $g'(x)>0$ □□ $x\in(x_0,+\infty)$ □□ $g'(x)<0$

$$\therefore g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{1-x_0\ln x_0}{x_0-3}=\frac{1-x_0\cdot\frac{x_0-2}{3}}{x_0-3}=-\frac{x_0+1}{3}\in(-\frac{10}{3},-3)$$

□□ $k>g(x)_{\max}$ □□ $k\in Z$ □ $\therefore k\geq -3$ □□□□ k □□□□□-3

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

4□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□ $f(x)=\sin x+e^x+ax$.

□1□□ $a=0$ □□□ $f(x)$ □ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ □□□□□□□

□2□□ $x\in[0,+\infty)$ □□□ $f(x)\geq 1$ □□□ a □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□

□2□ $[-2,+\infty)$

□□□□

□1□□2□□□□□□ $f(x)$ □ $x\in[0,+\infty)$ □□□□□□ $f(x)\geq 1$ □□□□□

□□□□ a □□□□□

□1□

□□ $a=0$ □□□ $f(x)=\sin x+e^x$ □ $f'(x)=\cos x+e^x$ □

□□ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ □□□ $f'(x)>0$ □□□ $f(x)$ □ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ □□□□□□□

□□□ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+e^{-\frac{\pi}{2}}=-1+e^{-\frac{\pi}{2}}<0$ □ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+e^{\frac{\pi}{2}}=1+e^{\frac{\pi}{2}}>0$ □

□□ $f(x)$ □ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ □□□□□□.

□2□

□□ $f(x)=\sin x+e^x+ax$ □□□ $f'(x)=\cos x+e^x+a$ □

□ $h(x)=\cos x+e^x+a$ □ $h'(x)=e^x-\sin x$ □□□ $x\in[0,+\infty)$ □ $e^x\ge1$

□□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□ $h(x)\ge h(0)=2+a$ □

□ $2+a\ge0$ □□□ $a\ge-2$ □□ $h(x)\ge h(0)=2+a\ge0$ □□ $f'(x)\ge0$ □

□□ $f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□ $f(x)\ge f(0)=1$ □

□□ $a\ge-2$ □□□ $x\in[0,+\infty)$ □□□ $f(x)\ge1$ □

□ $2+a<0$ □□□ $a<-2$ □□ $h(0)=2+a<0$ □

□ $h(\ln(2-a))=\cos(\ln(2-a))+e^{\ln(2-a)}+a=\cos(\ln(2-a))+2>0$ □

□□ $\exists x_0\in(0,\ln(2-a))$ □□ $h(x_0)=0$ □

□□ $x\in(0,x_0)$ □ $h(x)<0$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□ $f(x)<f(0)=1$ □□ $f(x)\ge1$ □□□□□ $a<-2$ □□□□

□□□□ a □□□□□□ $[-2,+\infty)$

□□□□

□□.

5□□2021·□□□□·□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{ax^2-x+1}{e^x}(a\in R)$.

□1□□ $a=-2$ □□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $x\ge 0$ □□ $f(x)\le 1$ □□ a □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□□□ $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ □ $(2,+\infty)$ □□□□□□□□ $\left(-\frac{1}{2},2\right)$

□2□ $\left(-\infty,\frac{e^2+1}{4}\right]$

□□□□

□1□ $a=-2$ □□ $f(x)=\frac{-2x^2-x+1}{e^x}$ □ $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)}{e^x}$ □

□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ □ $x_2=2$.

∴ $f(x)$ □□□□□□□□ $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ □ $(2,+\infty)$ □□□□□□□□ $\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

□2□□□□□□□□□□□□

$F'(x)=\frac{-ax^2+(2a+1)x-2}{e^x}=\frac{-(ax-1)(x-2)}{e^x}$.

① □ $a\le 0$ □□□ $f'(x)=0\Rightarrow x=2$

□□ $0\le x<2$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)\searrow$ □□ $x>2$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)\nearrow$.

□□□ $f(0)=1$ □ $x\ge 2$ □□ $f(x)<0$ □□□□.

② □ $a=\frac{1}{2}$ □□ $f'(x)=\frac{-\frac{1}{2}(x-2)^2}{e^x}\le 0$ □ $f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □ ↘ □

□□ $f(x)\le f(0)=1$ □□□□.

③ □ $0<a<\frac{1}{2}$ □□□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=2$ □ $x_2=\frac{1}{a}$ □

□□ $f(x)$ □ $[0,2)$ □ ↘ □ $\left(2,\frac{1}{a}\right)$ □ ↗ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □ ↘ □

□□ $f(x)\le f(0)=1$ □□□□.

③ □ $0<a<\frac{1}{2}$ □□□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=2$ □ $x_2=\frac{1}{a}$ □

□□ $f(x)$ □ $[0,2)$ □ ↘ □ $\left(2,\frac{1}{a}\right)$ □ ↗ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □ ↘ □

□□□□ $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1}{e^{\frac{1}{a}}}\le 1\Rightarrow e^{\frac{1}{a}}\ge 1$ □□□□□.

④ □ $a>\frac{1}{2}$ □□□ $f'(x)=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{a}$ □ $x_2=2$ □

□□ $f(x)$ □ $\left[0,\frac{1}{a}\right)$ □ ↘ □ $\left(\frac{1}{a},2\right)$ □ ↗ □ $(2,+\infty)$ □ ↘ .

□□□□ $f(2)=\frac{4a-1}{e^2}\le 1\Rightarrow \frac{1}{2}<a\le\frac{e^2+1}{4}$.

□□□□□ a □□□□□ $\left(-\infty,\frac{e^2+1}{4}\right]$.

□□□□□□□

① $x=0$ □□□□□□□□□.

② □ $x>0$ □□ $a\le\frac{e^x+x-1}{x^2}$ □□ $g(x)=\frac{e^x+x-1}{x^2}$ □

$g'(x)=\frac{xe^x-2e^x-x+2}{x^3}=\frac{(e^x-1)(x-2)}{x^3}$.

□ $g'(x)=0\Rightarrow x=2$ □□ $0<x<2$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)\searrow$ □□ $x>2$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)\nearrow$ □

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^2+1}{4}$ □$\therefore a\le\frac{e^2+1}{4}$.

6□□2021·□□□·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=ax+\frac{b}{x}+2-2a$ □□□□□ $(1,f(1))$ □□□□□□□ $y=2x+1$ □□.

□1□□ a□b □□□□□□□

□2□□ $f(x)\ge 2\ln x$ □ $[1,+\infty)$ □□□□□□ a □□□.

□□□□

□1□ $b=a-2$

□2□ $[1,+\infty)$

□□□□

□1□□□□□□ $f'(1)=2$ □□□□□□□

□2□□ $g(x)=f(x)-2\ln x$ □□□□□ $g'(x)=\frac{(x-1)(ax+a-2)}{x^2}$ □□ $a\le 0$ □ $0<a<1$ □ $a\ge 1$ □□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□

□□□ a □□□.

□1□

□□□□□□ $f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$ □

□□□□ $f'(1)=a-b=2$ □□ $b=a-2$

□2□

□□□1□□□ $f(x)=ax+\frac{a-2}{x}+2-2a$ □

□ $g(x)=f(x)-2\ln x=ax+\frac{a-2}{x}+2-2a-2\ln x$ □ $x\in[1,+\infty)$

$g'(x)=\frac{ax^2-2x-(a-2)}{x^2}=\frac{(x-1)(ax+a-2)}{x^2}$

i□□ $a\le 0$ □□ $g'(x)\le 0$ □ $g(x)$ □ $[1,+\infty)$ □□□□□∴ $g(x)\le g(1)=0$ □□.

ii□□ $a>0$ □□□ $g'(x)=0\Rightarrow x=1$ □ $x=\frac{2-a}{a}$ □

① □ $0<a<1$ □□ $\frac{2-a}{a}>1$ □

□ $1<x<\frac{2-a}{a}$ □□ $g'(x)<0$ □□ $x>\frac{2-a}{a}$ □□ $g'(x)>0$ □

$g(x)$ □ $\left[1,\frac{2-a}{a}\right)$ □□□□□□ $\left(\frac{2-a}{a},+\infty\right)$ □□□□□

□□□ $x\in\left(1,\frac{2-a}{a}\right)$ □□ $g(x)<g(1)=0$ □□ $f(x)\ge 2\ln x$ □ $[1,+\infty)$ □□□□.

② $a\ge 1$ □□ $\frac{2-a}{a}\le 1$ □□ $x>1$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □ $[1,+\infty)$ □□□□ $g(1)=0$ □□□ $f(x)\ge 2\ln x$.

□□□□□□ a □□□□□ $[1,+\infty)$

7□□2021·□□□□·□□□□□□□□ $f(x)=\ln x-ax+1$ □ $a\in\mathrm{R}$.

□1□□ $a=1$ □□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□□□ x □□□□ $f(x)+\frac{e^{x-1}}{x}+a-2\ge 0$ □□□□□ $x\ge 1$ □□□□□ e □□□□□□□□□ a □□□□.

□□□□

□1□ 0 □

□2□ $(-\infty,1]$.

□□□□

□1□□□ $a=1$ □□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□2□□ $x=1$，$x>1$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $a\le\dfrac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}$ □□□□□□□□□ $e^{x-1}\ge x$ □□□□□□□□□.

□1□

□ $a=1$ □□ $f(x)=\ln x-x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$ □□ $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

□□ $0<x<1$ □□ $f'(x)>0$，$f(x)$ ↗□□ $x>1$ □□ $f'(x)<0$，$f(x)$ ↘，

∴ $f(x)_{max}=f(1)=0$.

□2□

$\ln x-ax+1+\dfrac{e^{x-1}}{x}+a-2\ge0$ □□□□ $x\ge1$ □□□□

□ $a(x-1)\le e^{x-1-\ln x}+\ln x-1$，$\forall x\ge1$ □□□□

□ $x=1$ □□□□□□.

□ $x>1$ □□ $a\le\left(\dfrac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}\right)_{min}$，

□ $\dfrac{e^{x-\ln x-1}+\ln x-1}{x-1}\ge\dfrac{x-\ln x+\ln x-1}{x-1}=1$，

□□□□ $x-\ln x-1=0$ □ $x=1$ □□"="□∴□□□"="□□ $\dfrac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}>1$，

∴ $a\le1$ □ a □□□□□□ $(-\infty,1]$.

8□□2021·□□·□□□□□□□□ $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+1-e^x$．

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□□ $x\ge0$ □□□ $f(x)\le ax^2-\dfrac{1}{2}x^3$ □□□□□□ a □□□□□□

□□□□

□1□ $f(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□□

□2□$\left[\frac{9-e^2}{4},+\infty\right)$

□□□□

□1□□□□ $f'(x)$ □□□□□ $f'(0)=0$ □□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□ $x=0$ □ $x>0$ □□□□□□ $x>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□1□

$x\in\mathrm{R}$ □□□□□ $f'(x)=x+1-e^x$ □ $f'(0)=0$ □

□ $g(x)=f'(x)=x+1-e^x$ □□ $g'(x)=1-e^x$ □

□□□ $x\in(-\infty,0)$ □□ $g'(x)>0$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □

∴ $g(x)$ □ $(-\infty,0)$ □□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□∴ $g(x)=f'(x)\le g(0)=0$ □

∴ $f(x)$ □ $(-\infty,+\infty)$ □□□□□□

□2□

□ $x=0$ □□ $f(0)=0$ □□□□□□

□ $x>0$ □□□□□□ $a-\frac{1}{2}\ge\left(\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}\right)_{\max}$ □

□ $h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$ □ $x>0$ □

□ $h'(x)=\frac{\left(\frac{3}{2}x^2+1-e^x\right)\cdot x^2-2x\left(\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x\right)}{x^4}$

$=\frac{\frac{1}{2}x^3-x-2-(x-2)\cdot e^x}{x^3}=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)-(x-2)\cdot e^x}{x^3}$

$=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x\right)}{x^3}$□

□□1□□□□□ $x>0$ □□ $f(x)<f(0)=0$ □□ $\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x<0$ □∴□ $x\in(0,2)$ □□ $h'(x)>0$ □□ $x\in(0,2)$ □□ $h'(x)<0$ □

□ $h(x)$ □ $(0,2)$ □□□□□□ $(2,+\infty)$ □□□□□

∴ $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{7-e^2}{4}$ □

∴ $a-\frac{1}{2}\geq\frac{7-e^2}{4}$ □□ $a\geq\frac{9-e^2}{4}$ □

□□□□□□□ *a* □□□□□ $\left[\frac{9-e^2}{4},+\infty\right)$ □

□□□□

□□“□□”□□□□□

□□□□□□□ $h(x)$ □□□□□.

9□□2021·□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=x\ln x+2x-1$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□ $(x_0,f(x_0))$ □□□□ y □□□□□□ -2 □□ x_0 □

□2□□ $x>1$ □□□ x □□□ $a(x-1)<f(x)$ □□□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□□□□

□1□1

□2□4

□□□□

□1□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□□□□□ $(x_0,f(x_0))$ □□□□□□ y □□□□□□ -2 □□□□□ x_0 □□□

□2□□□□□□□□□□ a □□ $a<\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ □□ $g(x)=\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ □□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□ $a<g(x)_{\min}$ □□□□.

□1□

□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2=\ln x+3$ □

□□□ $(x_0, f(x_0))$ □□□□□□□ $\ln x_0+3$ □□ $f(x_0)=x_0\ln x_0+2x_0-1$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□ $(x_0, f(x_0))$ □□□□□□□□ $y-(x_0\ln x_0+2x_0-1)=(\ln x_0+3)(x-x_0)$ □

□ $(\ln x_0+3)x-y-x_0-1=0$ □□□ $y=(\ln x_0+3)x-x_0-1$ □

□□□□ y □□□□□□ $-x_0-1$ □□□ $-x_0-1=-2$ □□□ $x_0=1$ □

□2□

$a(x-1)<f(x)$ □ $a(x-1)<x\ln x+2x-1$ □

□ $x>1$ □□□ $x-1>0$ □□□ $a<\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ □□ $x\in(1,+\infty)$ □□□□

□ $x>1$ □□□ $g(x)=\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ □□ $g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$ □

□□ $h(x)=x-\ln x-2$ □□ $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$ □

□□ $h(x)=x-\ln x-2$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□ $h(3)=1-\ln 3<0$ □ $h(4)=2(1-\ln 2)>0$ □

□□ $\exists x_0\in(3,4)$ □ $h(x_0)=0$ □□ $\exists x_0\in(3,4)$ □□ $x_0-2=\ln x_0$ □

□ $1<x<x_0$ □□ $h(x)<0$ □ $g'(x)<0$ □□ $x>x_0$ □□ $h(x)>0$ □ $g'(x)>0$ □

□□ $g(x)$ □ $(1,x_0)$ □□□□□□□ $(x_0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+2x_0-1}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+2x_0-1}{x_0-1}=x_0+1$ □

□□ $a<x_0+1$ □□□□ $x_0+1\in(4,5)$ □□□□□ a □□□□□□□ 4 □

□□□□

□□□□□ □□□□ $f(x,\lambda)\ge 0(x\in D)$ □ λ □□□□□□□□□□ $f(x,\lambda)\ge 0$ □□□ $\lambda\ge g(x)$ □ $\lambda\le g(x)(x\in D)$ □□□□□□□□□

$\lambda\ge g(x)_{\max}$ □ $\lambda\le g(x)_{\min}(x\in D)$ □□ $g(x)$ □□□□□.

10□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^{-x}-2ax-1(x\in R)$.

□1□□ $a=-\frac{1}{2}$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $x\ge 0$ □□ $f(-x)+\ln(x+1)\ge 0$ □□□□ a □□□□□.

□□□□

□1□0

□2□ $[-1,+\infty)$

□□□□

□1□□ $a=-\frac{1}{2}$ □□□ $f'(x)=-e^{-x}+1$ □ □ $f'(x)<0$ □ $f'(x)>0$ □□□□□□□□□□□□□

□2□□ $x\ge 0$ □ $f(-x)+\ln(x+1)\ge 0$ □□□□ $e^{x}+2ax+\ln(x+1)-1\ge 0$ (*)□□ $h(x)=e^{x}+2ax+\ln(x+1)-1$ □□□□□□□

$h(x)_{\min}\ge 0$ □□.

□1□

□□□ $a=-\frac{1}{2}$ □□□□□□□□□ $f(x)=e^{-x}+x-1$ □

□ $f'(x)=-e^{-x}+1$ □

□ $f'(x)=-e^{-x}+1=0$ □□ $x=0$ □

□ $x<0$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>0$ □□ $f'(x)>0$ □

□□□□□□□ $(0□+\infty)$ □□□□□□□□□ $(-\infty□0)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□ $f(0)=e^{0}+0-1=0$ □

□2□

□ $x\ge 0$ □□ $f(-x)+\ln(x+1)\ge 0$ □

□ $e^x+2ax+\ln(x+1)-1\ge 0$ (*)□

□ $h(x)=e^x+2ax+\ln(x+1)-1$ □

□ $h'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x+1}+2a,$

□ $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+2a$ □□

$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\ge 0$ □

∴□□ $\varphi(x)$ □□□ $[0□+\infty)$ □□□□□

$\varphi(0)=2+2a$

① □ $a\ge -1$ □□□ $\varphi(0)=2+2a\ge 0$ □

∴□□ $h(x)$ □□□ $[0□+\infty)$ □□□□□

∴ $h(x)\ge h(0)=0$ □∴□*□□□□□

② □ $a<-1$ □□□ $\varphi(0)=2+2a<0$ □

$\varphi(-2a)=e^{2a}+\frac{1}{1-2a}+2a\ge 1-2a+\frac{1}{1-2a}+2a=1+\frac{1}{1-2a}>0$ □

□ $\exists x_0\in(0□-2a)$ □□□ $\varphi(x_0)=0$ □

□□ $0<x<x_0$ □□ $\varphi(x)<\varphi(x_0)=0$ □□ $h'(x)<0$ □

∴□□ $h(x)$ □□□ $(0□x_0)$ □□□□□

∴ $h(x_0)<h(0)=0$ □□□*□□□□□□□

□□□□□□□ a □□□□□□ $[-1□+\infty)$

11□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-ax$□

□1□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□ a □□□□□□

□2□□ $x\ge 0$□ $f(x)\ge 2-\cos x$ □□ a □□□□□□

□□□□

□1□ $(e,+\infty)$

□2□ $(-\infty,1]$

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

(2) □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□

□□□ $f(x)=e^x-ax$ □□ $f'(x)=e^x-a$ □

□ $a\le 0$ □□ $f'(x)\ge 0$ □ $f(x)$ □□□□□ $f(x)$ □ □□□□□□□□□□□□□□□□□

□ $a>0$ □□ $f'(x)=0$ □□ $x=\ln a$ □□ $x<\ln a$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□

□ $x>\ln a$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□ $f(x)$ □ $x=\ln a$ □□□□□□ $f(\ln a)$ □□□□□□□□

□ $x\to-\infty$ □□ $f(x)\to+\infty$ □ $x\to+\infty$ □□ $f(x)\to+\infty$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $f(\ln a)<0$ □□ $e^{\ln a}-a\ln a<0$ □□□

$a>e□ f(0)=1>0,\ f(a)=e^a-a^2>e^e-e^2>0$□

□□□ $f(x)$ □□□□□□□ a □□□□□□ $(e,+\infty)$ □

□2□

□□□□□ $g(x)=f(x)+\cos x-2$ □□ $g(x)=e^x-ax+\cos x-2$ □

□ $g'(x)=e^x-\sin x-a$ □ $g'(0)=1-a$ □ $g(0)=0$ □

①□ $a\le 1$ □□ $g'(0)\ge 0$ □□ $h(x)=g'(x)=e^x-\sin x-a$ □□ $h'(x)=e^x-\cos x$ □□ $x\ge 0$ □□

$h'(x)=e^x-\cos x\ge 1-\cos x\ge 0$ □□ $h(x)$ □ $g'(x)$ □ $x\ge 0$ □□□□□□ $g'(x)\ge g'(0)=1-a\ge 0$ □

□□ $g(x)$ □ $x\ge 0$ □□□□□□ $g(x)\ge g(0)=0$ □□□ $f(x)\ge 2-\cos x$ □□□

②□ $a>1$ □□ $g'(0)<0$ □ $g'(\ln(a+2))=e^{\ln(a+2)}-\sin(\ln(a+2))-a=2-\sin(\ln(a+2))>0$ □

□ $\exists x_0\in(0,\ln(a+2))$ □□□ $g'(x_0)=0$ □□□□□ $g'(x)=e^x-\sin x-a$ □ $x\ge 0$ □□□□□□

□□ $0<x<x_0$ □□ $g'(x)<0$ □□ $g(x)$ □□□□□□ $g(x)<g(0)=0$ □□□□□□

□□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,1]$ □

12□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-k\sin x$ □□□ k □□□□

□1□□ $k=1$ □□□ $f(x)$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□2□□□□□ $x\in(0,\pi)$ □□□ $f(x)>1$ □□ k □□□□□□

□□□□

□1□□□□□□

□2□ $k\in(-\infty,1]$

□□□□

□□1□□ $k=1$ □□□□□□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□2□□ $f(x)>1$ □ $e^x-k\sin x-1>0$ □□ $g(x)=e^x-k\sin x-1$ □□□□ k □□□ $k\le 0$ □ $0<k\le 1$ □ $k>1$ □□□□□□□□□ $g(x)$

□□□□□□□□□□□□□□ k □□□□□.

□1□

□$k=1$□□□ $f(x)=e^x-\sin x$□□ $f'(x)=e^x-\cos x$□

□$(0,+\infty)$□□ $f'(x)>0$□□□□□ $f(x)$□□□$(0,+\infty)$□□□□□□□.

□2□

□$x\in(0,\pi)$□□$\sin x\in(0,1]$□□$f(x)>1$□□$e^x-k\sin x>1$□□$e^x-k\sin x-1>0$.

□$g(x)=e^x-k\sin x-1$

①□$k\le 0$□□□□$x\in(0,\pi)$□□$\sin x\in(0,1]$□□$-k\sin x\ge 0$□

□$e^x-1>0$□□$f(x)>0$□$x\in(0,\pi)$□□□□□□$k\le 0$□

②□$0<k\le 1$□□$g'(x)=e^x-k\cos x$□$g''(x)=e^x+k\sin x$□

□$g''(x)>0$□$x\in(0,\pi)$□□□□□$g'(x)$□$x\in(0,\pi)$□□□□□□

□$g'(x)>g'(0)=e^0-k>0$□□$g(x)$□$x\in(0,\pi)$□□□□□□

□$g(x)>g(0)=e^0-1=0$□□$0<k\le 1$□

③□$k>1$□□□②□□$g'(x)$□$x\in(0,\pi)$□□□□□□□$g'(x)=0$□□□□x_0□

□$g(x)$□$x\in(0,x_0)$□□□□□□□□$x\in(x_0,\pi)$□□□□□□

□$g(0)=e^0-1=0$□$g(x_0)<0$□□□□□□

□□□$k\in(-\infty,1]$

□□□□

□□.

13□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)=\ln(x+1)+\cos x+mx$.

□1□□$x=0$□$f(x)$□□□□□□□□m□

□2□□ $f(x)\le 1$ □ $(-1,0]$ □□□□□□□ m □□□.

□□□□

□1□ $m=-1$

□2□ $[-1,+\infty)$

□□□□

□1□□□□□□ $f(0)=0$ □□ $m=-1$ □□□□□□□□□ $f(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□□

□2□□□□1□□□□□ m □ -1 □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□..

□1□

□□□□ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x+m$ □

□ $f(0)=0$ □□ $\dfrac{1}{0+1}-\sin 0+m=0$ □

□□ $m=-1$.

□ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x-1\,(x>-1)$ □

□ $-1<x<0$ □□□ $g(x)=f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x-1$ □

□□ $g'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\cos x<0$ □

□ $f(x)$ □ $(-1,0)$ □□□□□□

□□ $f(x)>f(0)=0$ □

□ $0<x<\pi$ □□ $\dfrac{1}{x+1}<1$ □ $-\sin x<0$ □

□□ $f(x)<0$.

□□□□□ $m=-1$ □□ $x=0$ □ $f(x)$ □□□□□□□

□□ $m=-1$.

□2□

□□□□1□□ $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x+m$□

□$-1<x<0$□□ $f'(x)$□$(-1,0)$□□□□□

$\therefore f'(x)>f'(0)=1+m$□

①$m\ge -1$□□ $f'(x)>f'(0)=1+m\ge 0$□

$f(x)$□$(-1,0]$□□□□□

□□$f(x)\le f(0)=1$□

②$m<-1$□□□□$f'(x)$□$(-1,0]$□□□□□

$f'(0)<0$□$f'\left(-\frac{1}{m}-1\right)=-\sin\left(-\frac{1}{m}-1\right)>0$□

$\therefore$□□$x_0\in(-1,0)$□$f'(x_0)=0$□

□$x\in(x_0,0)$□$f'(x)<0$□$f(x)$□□□

□$x\in(x_0,0)$□□$f(x)>f(0)=1$□□$f(x)\le 1$□□.

□□□$m\ge -1$□□$f(x)\le 1$□$(-1,0]$□□□□.

□□□□m□□□□$[-1,+\infty)$.

14□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)=m+\ln x$□$x=1$□□□□□□□$y=h(x)$□□$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=0$.

□1□□□□$g(x)=\frac{h(x)}{e^x}$□□□□

□2□□□$x\ge 0$□□□□□$e^x-ax^2-h(x)\ge 0$□□□□□□□a□□□□□.

□□□□□1□□□□□1□□□□□□□2□ $a\le\frac{1}{2}$.

□□□□

□1□□□ $f(\frac{1}{e^2})=0$ □□□ m □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $h(x)$ □□□□□□□ $g(x)$ □□ $g'(x)$ □

□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□ $t(x)=e^x-ax^2-x-1$ □□□ $t'(x)$ □□□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $t(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□

□□□1□□ $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=m+\ln\frac{1}{e^2}=m-2=0$ □□ $m=2$ □

$f(x)=2+\ln x$ □ $f(1)=2+\ln x=2$ □□□ $f'(x)=\frac{1}{x}$ □ $f'(1)=1$ □

□□□□□ $y=x+1$ □□□ $h(x)=x+1$ □

□□ $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$ □□ $g'(x)=\frac{-x}{e^x}$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $x\in(-\infty,0)$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□□□ $g(x)$ □ $x=0$ □□□□□□□□□□□ $g(0)=1$ □□□□□.

□2□□ $t(x)=e^x-ax^2-x-1$ □ $t'(x)=e^x-2ax-1$ □ $x\ge0$ □ $e^x-1\ge0$ □

1.□ $a\le0$ □□ $t'(x)\ge0$ □□□ $t(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $t(x)\ge t(0)=0$ □□ $a\le0$ □□□□□

2.□ $a>0$ □□□ $u(x)=t'(x)$ □ $u'(x)=e^x-2a$ □

① □ $0<a\le\frac{1}{2}$ □ $2a\le1$ □ $u'(x)\ge0$ □

□□ $t'(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□ $t'(x)\ge t'(0)=0$ □

□□ $t(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□□ $t(x)\ge t(0)=0$ □□□ $0<a\le\frac{1}{2}$ □□□□□

② □ $a>\frac{1}{2}$ □□ $u'(x)=e^x-2a=0$ □ $x=\ln 2a>0$ □□□ $t'(x)$ □ $(\ln 2a,+\infty)$ □□□□

□ $(0,\ln 2a)$ □□□□ $t(0)=0$ □□□□ $x\in(0,\ln 2a)$ □ $t'(x)<0$ □

□□ $t(x)$ □ $[0,\ln 2a)$ □□□□□□ $t(0)=0$ □□□ $x\in(0,\ln 2a)$ □ $t(x)<0$ □□□.

□□□ $a\le\frac{1}{2}$.

□□□□

□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

15□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x+ax^2-x(a\in R)$ □

□1□□ $a\ge 0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $x\ge 0$ □□ $f(x)\ge\frac{1}{2}x^3+1$ □□□□□ a □□□□□□

□□□□1□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□ $(-\infty,0)$ □□2□ $\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$ □

□□□□

□1□□□□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $a\ge\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□1□□ $a\ge 0$ □□ $f'(x)=e^x+2ax-1$ □

□ $g(x)=e^x+2ax-1$ □

$\because g'(x)=e^x+2a>0$ □ $\therefore g(x)$ □ R □□□□□ $f'(x)$ □ R □□□□

□$f'(0)=0$□∴□$x>0$□□$f'(x)>0$□□$x<0$□□$f'(x)<0$□

∴$f(x)$□□□□□$(0,+\infty)$□□□□□$(-\infty,0)$.

□2□□$x\geq 0$□□$f(x)\geq \frac{1}{2}x^3+1$□□□□

① □$x=0$□□□□□□□□□□□$a\in R$□

② □$x>0$□□□□$a\geq \dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$□□□□

□$h(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$□□$h'(x)=\dfrac{(2-x)(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)}{x^3}$□

□$m(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$□□□$m'(x)=e^x-x-1$□$m''(x)=e^x-1$□

□$x\geq 0$□□□$m''(x)\geq 0$□□□□□□$m'(x)$□$(0,+\infty)$□□□

∴$m'(x)>m'(0)=0$□

∴$m(x)\geq 0$□□□□□$m(x)$□$(0,+\infty)$□□□∴$m(x)>m(0)=0$□

□□$h'(x)=0$□□□$x=2$□

□$0<x<2$□□$h'(x)>0$□$h(x)$□$(0,2)$□□□

□$x>2$□□$h'(x)<0$□$h(x)$□$(2,+\infty)$□□□

∴$h(x)_{max}=h(2)=\frac{7-e^2}{4}$□□$a\geq \dfrac{7-e^2}{4}$□

□□□a□□□□□□$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

16□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)\ln x-\frac{1}{2}(a\in R,a\neq 0)$.

□1□□□$a=2$□□□□$y=f(x)$□□$(1,f(1))$□□□□□□□

□2□□□□□ $x\in[1,+\infty)$ □□□ $f(x)\geq 0$ □□□ a □□□□□.

□□□□1□ $2x+y-2=0$ □□2□ $(-\infty,0]$.

□□□□

□1□□ $a=2$ □□□□ $f'(x)=x-\frac{3}{x}$ □□□ $f'(1)=-2$ □ $f(1)=0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□ $x\in[1,+\infty)$ □ $f(x)_{\min}\geq 0$ □□□ $f'(x)=\frac{x^2-(a+1)}{x}$ □□ $a\leq 0$ □ $a>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□1□□ $a=2$ □□ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3\ln x-\frac{1}{2}$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□□ $f'(x)=x-\frac{3}{x}$ □□□ $f'(1)=-2$ □□□ $f(1)=0$ □

□□□□ $y=f(x)$ □□ $(1,f(1))$ □□□□□□□ $y-0=-2(x-1)$ □□ $2x+y-2=0$.

□2□□□□ $x\in[1,+\infty)$ □□□ $f(x)\geq 0$ □□□□□□□□ $x\in[1,+\infty)$ □ $f(x)_{\min}\geq 0$.

□□ $f'(x)=x-\frac{a+1}{x}=\frac{x^2-(a+1)}{x}(x\geq 1)$ □

□ $a+1\leq 1$ □□□ $a\leq 0$ □□ $f(x)$ □ $[1,+\infty)$ □□□□□□□□□□ $f(x)_{\min}=f(1)\geq 0$ □□□ $f(1)=\frac{1}{2}-(a+1)\ln 1-\frac{1}{2}=0$ □□□ $a\leq 0$

□□□□□

□ $a+1>1$ □□□ $a>0$ □□ $\sqrt{a+1}>1$ □

□□ $f(x)$ □ $[1,\sqrt{a+1}]$ □□□□□□ $[\sqrt{a+1},+\infty)$ □□□□□□

□□ $\forall x_0\in(1,\sqrt{a+1})$ □□ $f(x_0)<f(1)=0$ □ $f(x)\geq 0$ □□□ $a>0$ □□□□□.

□□□□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,0]$.

17□□2021·□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a$ □□□□□ $A(1,f(1))$ □□□□□ y □□□□□ 2□

□1□□a□□□

□2□□□□$x>2$□□□□$k(x-2)+2-2x-x^2<f(x)$□□□□□□□□k□□□□□

□□□□□1□$a=2$□□2□4

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$y-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(x-1)$□□□□□□□$2-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(0-1)$□□□□□$a$□□.

□2□□□□□□□□□□$x>2$□□□□□$k<\frac{x\ln x+x}{x-2}$□□□□□$h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}$□□□□$k<h(e^2)=\frac{3e^2}{e^2-2}\in(4,5)$□□□□$k$□□□

□□□□4□□□□□□.

□□□□

□1□$f(1)=\frac{a}{2}-1$□$f'(x)=\ln x-ax$□$f'(1)=-a$□

□□$f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a$□□□□□$A(1,f(1))$□□□□□□□□

$$y-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(x-1)$$ □

□□□□□y□□□□□□2□□□$x=0$□□$y=2$□

□$2-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(0-1)$□$a=2$□

□2□$f(x)=x\ln x-x^2-x+2$□

□□□$k(x-2)+2-2x-x^2<f(x)$□□□$k(x-2)<x\ln x+x$□

□$x>2$□□□□□□□$k<\frac{x\ln x+x}{x-2}$□□□□

□$h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}$□□□□$k<h(e^2)=\frac{3e^2}{e^2-2}$□

□$\frac{3e^2}{e^2-2}\in(4,5)$□□□□□$k$□□□□□□□$4$□

□□□□$k=4$□□□□□

□$g(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$□$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$□

$0<t<1$□□$g'(t)<0$□$t>1$□□$g'(t)>0$□

$g(t)$□$(0,1)$□□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□□

$g(t)_{\min}=g(1)=0$□

□□$g(t)\geq 0$□□$\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$□□□□□□□x□□□□

□□□$\ln\frac{x}{e^2}\geq 1-\frac{e^2}{x}$□□□□$\ln x\geq 3-\frac{e^2}{x}$□

$h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}\geq\frac{x\left(3-\frac{e^2}{x}\right)+x}{x-2}=4+\frac{8-e^2}{x-2}>4$□

□□□□□□□□k□□□□□4□

18□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□$f(x)=ax^2-x+\ln(x+1)$.

□1□□□□$f(x)$□□□□□□

□2□□□□□□$x\in[0□+\infty)$□□□$f(x)\geq 0$□□□□□□a□□□□.

□□□□□1□□□□□□□2□□□□□$\frac{1}{2}$.

□□□□

□1□□□□□$f'(x)=\frac{x(2ax+2a-1)}{x+1}$□□$a=0$□$a<0$□$a=\frac{1}{2}$□$a>\frac{1}{2}$□$0<a<\frac{1}{2}$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□1□□□□□□□□□□□□□$a\leq 0$□$0<a<\frac{1}{2}$□$a=\frac{1}{2}$□$a>\frac{1}{2}$□□□□□□□□□□□□□□□a□□□□.

□□□□

□□□1□$f(x)=ax^2-x+\ln(x+1)$□□□□□$(-1,+\infty)$□$f'(x)=2ax-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x(2ax+2a-1)}{x+1}$□

□ $a=0$□ $f(x)=\frac{-x}{x+1}$□□□ $-1<x<0, f(x)>0$□ $x>0, f(x)<0$□

□□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,0)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $a\neq 0$□□ $f(x)=0$□□ $x_1=0, x_2=\frac{1-2a}{2a}$.

□ $a<0$□□ $x_2=\frac{1-2a}{2a}=\frac{1}{2a}-1<-1$□□□□ $-1<x<0, f(x)<0$□ $x>0, f(x)<0$□

□□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,0)$ □□□□□ $(0,+\infty)$

□ $a>0$□□ $x_2=\frac{1-2a}{2a}=\frac{1}{2a}-1$□

□ $a=\frac{1}{2}$□ $x>-1, f(x)\geq 0$□□□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$□

□ $a>\frac{1}{2}$□ $x_2=\frac{1}{2a}-1\in(-1,0)$□

□□□ $-1<x<\frac{1}{2a}-1, f(x)>0$□ $\frac{1}{2a}-1<x<0, f(x)<0$□ $x>0, f(x)>0$

□□ $f(x)$ □□□□ $(-1,\frac{1}{2a}-1)$ □ $(0,+\infty)$□□□□□ $(\frac{1}{2a}-1,0)$ □

□ $0<a<\frac{1}{2}$□ $x_2=\frac{1}{2a}-1\in(0,+\infty)$□

□□□ $-1<x<0, f(x)>0$□ $0<x<\frac{1}{2a}-1, f(x)<0$□ $x>\frac{1}{2a}-1, f(x)>0$

□□ $f(x)$ □□□□ $(-1,0)$□ $(\frac{1}{2a}-1,+\infty)$□□□□□ $(0,\frac{1}{2a}-1)$□

□□□□ $a\leq 0$ □ $f(x)$ □□□□ $(-1,0)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $a=\frac{1}{2}$□ $f(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$□

□ $a>\frac{1}{2}$□ $f(x)$ □□□□ $(-1,\frac{1}{2a}-1)$□ $(0,+\infty)$□□□□□ $(\frac{1}{2a}-1,0)$□

□ $0<a<\frac{1}{2}$□ $f(x)$ □□□□ $(-1,0)$□ $(\frac{1}{2a}-1,+\infty)$□□□□□ $(0,\frac{1}{2a}-1)$□

□2□□□□□□□□ $x\in[0,+\infty)$ □□□ $f(x)\geq 0$ □□□□□ $f(0)=0$.

当 $a\le 0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减，所以当 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<f(0)=0$，不符合，舍去.

当 $0<a<\frac{1}{2}$，$f(x)$ 单减区间 $(0,\frac{1}{2a}-1)$，单增区间 $(\frac{1}{2a}-1,+\infty)$.

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2a}-1)$，$f(x)<f(0)=0$，不符合，舍去.

当 $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$ 单增区间为 $(-1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，则 $f(x)\ge f(0)=0$ 恒成立;

当 $a>\frac{1}{2}$，$f(x)$ 单增区间 $(-1,\frac{1}{2a}-1)$，$(0,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，则 $f(x)\ge f(0)=0$ 恒成立;

综述：$a\ge\frac{1}{2}$，所以 a 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

19.（2021·广西·高三月考（文））已知函数 $f(x)=x-a\ln(x+1)$.

(1) 当 $a=3$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a=1$ 时，关于 x 的不等式 $kx^2\ge f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求 k 的取值范围.

【答案】(1) 减区间为 $(-1,2)$，增区间为 $(2,+\infty)$；(2) $k\ge\frac{1}{2}$.

【分析】

(1) 利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 化简 $kx^2\ge f(x)$ 为 $kx^2-x+\ln(x+1)\ge 0$，构造函数 $g(x)=kx^2-x+\ln(x+1),x\ge 0$，结合对 k 进行分类讨论，利用 $g(x)_{\min}\ge 0$ 求得 k 的取值范围.

【详解】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$

当 $a=3$ 时，$f(x)=x-3\ln(x+1)$，

$f'(x)=1-\frac{3}{x+1}=\frac{x-2}{x+1}$，

当 $x\in(-1,2)$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 是减函数，

$x\in(2,+\infty),\ f'(x)>0,\ f(x)$□□□□□

□□□$f(x)$□□□□□□□1□2□□□□□□□2□□∞□□

□2□□ a□1 □□ $f(x)=x-\ln(x+1)$ □

$kx^2\geq f(x)$ □□ $kx^2-x+\ln(x+1)\geq 0$ □

□ $g(x)=kx^2-x+\ln(x+1), x\geq 0$ □□□□ $g(x)\geq 0$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g(0)=0$ □

$g'(x)=2kx-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2kx^2+(2k-1)x}{x+1}=\dfrac{x[2kx+(2k-1)]}{x+1}$ □

① □ $k\leq 0$ □□ $g'(x)\leq 0$ □□□ $g(x)$□ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g(x)<g(0)=0$ □□□□□□□

② □ $0<k<\frac{1}{2}$ □□□ $g'(x)=0$ □ $x=-1+\dfrac{1}{2k}>0$ □

□ $x\in\left(0,-1+\dfrac{1}{2k}\right)$ □□ $g'(x)<0$ □□ $x\in\left(-1+\dfrac{1}{2k},+\infty\right)$ □□ $g'(x)>0$ □

□□ $g(x)$ □ $\left(0,-1+\dfrac{1}{2k}\right)$ □□□□□□

□□□□ $x\in\left(0,-1+\dfrac{1}{2k}\right)$ □□ $g(x)<g(0)=0$ □□□□□□□

③ □ $k\geq\dfrac{1}{2}$ □□ $g'(x)\geq 0$ □□ $g(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□□□ $g(x)\geq g(0)=0$ □□□□

□□□ $k\geq\dfrac{1}{2}$ □

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

20□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-\sin x$ □ $x\in[0,+\infty)$ □ e □□□□□□□□.

□1□□□□ $f(x)\ge 1$ □

□2□□ $f'(x)+2\cos x-2\ge bx$ □□□□□□□ b □□□.

□□□□□1□□□□□□□□2□ $b\le 1$.

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-\sin x$ □ $x\in[0,+\infty)$ □□□□□□□□ $f(x)\ge f(0)=1$ □□□

□2□□□□□□□ $e^x+\cos x-2-bx\ge 0$ □□□□□□ $h(x)=e^x+\cos x-2-bx$ □□ $h(0)=0$ □ $h'(x)=e^x-\sin x-b$ □

$h'(0)=1-b$ □□□ b □□ $b\le 1$ □ $b>1$ □□□□.

□□□□

□1□ $f(x)=e^x-\sin x$ □□□□ $f'(x)=e^x-\cos x$.

□□□□□ $x\in(0,+\infty)$ □□ $e^x>1$ □ $\cos x\le 1$.

□□ $x\in(0,+\infty)$ □□ $e^x-\cos x>0$ □□ $f'(x)>0$.

□□□□□ $f(x)=e^x-\sin x$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□ $f(x)\ge f(0)=1$.

□□□□ $\forall x\in[0,+\infty)$ □ $f(x)\ge 1$ □

□2□ $f'(x)+2\cos x-2\ge bx$ □□□□

$\therefore e^x+\cos x-2-bx\ge 0$ □□□.

□ $h(x)=e^x+\cos x-2-bx$ □ $h(0)=0$ □ $h'(x)=e^x-\sin x-b$ □ $h'(0)=1-b$.

① □ $b\le 1$ □□ $x\ge 0$ □

□□1□□□ $h'(x)\ge 0$ □

$\therefore h(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore h(x)\geq h(0)=2-2=0$ □□□.

$\therefore b\leq 1$ □□□□□

② □ $b>1$ □□□□1□□□

$h(x)=e^{x}-\sin x-b$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□ $h(0)=1-b<0$ ∴□□ $x_0\in(0,+\infty)$ □□□ $h(x_0)=0$.

∴ $x\in(0,x_0)$ □□ $h(x)$ □□□□□

$\therefore h(x_0)<h(0)=0$ □□□□□□□□.

□□□ $b\leq 1$.

□□□□

□□□

□□□□□□□□□□□□□□(□)□□□□□□

21□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln(x+1)-kx-1$ □ $x\geq 0$.

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ x □□□□ $f(x)+\dfrac{e^{x}}{x+1}\geq 0$ □□□ $x\geq 0$ □□□□□□□ k □□□□□□

□□□□1□□□□□□□□2□ $k\leq 1$ □

□□□□

□1□□□ $f'(x)=\dfrac{1-k-kx}{x+1}$ □□□ k □□□□□□□□

□2□□□□ $h(x)=g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-k+\dfrac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}$ □ $h'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^{2}}+\dfrac{(x^{2}+1)e^{x}}{(x+1)^{3}}=\dfrac{(x^{2}+1)e^{x}-(x+1)}{(x+1)^{3}}$ □□□ $e^{x}\geq x+1$ □□□

$h(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x-(x+1)}{(x+1)^3}\geq 0$□□ $g(x)\geq 1-k$□□□ k□□□□□□.

□□□□

□1□ $f(x)=\ln(x+1)-kx-1$□ $x\geq 0$□ $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-k=\dfrac{1-k-kx}{x+1}$□

①□ $k\leq 0$□□ $f'(x)>0$□□□□□ $f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

②□ $0<k<1$□□ $f'(x)=0$□□ $x=\dfrac{1}{k}-1>0$□

x	$\left(0,\dfrac{1}{k}-1\right)$	$\dfrac{1}{k}-1$	$\left(\dfrac{1}{k}-1,+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	□□□ $f\left(\dfrac{1}{k}-1\right)$	↘

③□ $k\geq 1$□□ $f'(x)\leq 0$□□□□□ $f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□ $k\leq 0$□ $f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□□ $0<k<1$□ $f(x)$ □ $\left(0,\dfrac{1}{k}-1\right)$ □□□□□□□ $\left(\dfrac{1}{k}-1,+\infty\right)$ □□□□□□□ $k\geq 1$□

$f(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□2□□ $g(x)=f(x)+\dfrac{e^x}{x+1}$□□ $g(x)=\ln(x+1)-kx+\dfrac{e^x}{x+1}-1$□ $x\geq 0$

□□ $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-k+\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$□□ $h(x)=g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-k+\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$□

$h'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}=\dfrac{(x^2+1)e^x-(x+1)}{(x+1)^3}$□

□□□□ $e^x\geq x+1$ □□□ $x\geq 0$ □

□ $\varphi(x)=e^x-x-1$ □ $x\ge0$ □□ $\varphi'(x)=e^{x-1}\ge0$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□□ $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$ □

□□□ $x\ge0$ □□ $e^x\ge x+1$ □

□□ $h'(x)=\frac{(x^2+1)e^x-(x+1)}{(x+1)^3}\ge\frac{(x+1)(x^2+1)-(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{x^2}{(x+1)^2}\ge0$ □

□□ $g'(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□□ $g'(x)\ge g'(0)=1-k$ □

① □ $1-k\ge0$ □□ $k\le1$ □□ $g'(x)\ge g'(0)=1-k\ge0$ □□□ $g(x)$ □ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g(x)\ge g(0)=0$ □ $\forall x>0$ □□□□□□ $k\le1$ □□□□□

② □ $1-k<0$ □□ $k>1$ □□□ $g'(0)=1-k<0$ □

$$g'(4k)=\frac{1}{4k+1}-k+\frac{4ke^{4k}}{(4k^2+1)^2}>\frac{4ke^{4k}}{(4k^2+1)^2}-k=k\cdot\left[\frac{e^{4k}}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2}-1\right]=k\left[\left(\frac{e^{2k}}{2k+\frac{1}{2}}\right)^2-1\right]$$ □

□□ $k>1$ □ $e^x\ge x+1$ □□ $e^{2k}\ge 2k+1>2k+\frac{1}{2}$ □□ $\left(\frac{e^{2k}}{2k+\frac{1}{2}}\right)^2>1$ □

□□ $g'(4k)>0$ □

□ $g'(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□□□□ $x_0\in(0,4k)$ □□□ $g'(x)=0$ □

□□ $x\in(0,x_0)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□□□

□□ $g(x_0)<g(0)=0$ □□□ $x_0\in(0,4k)$ □□□□□□□

□□ $k>1$ □□□□□□□□

□□□□□□□ k □□□□□□ $k\le1$ □